数理解析研究所講究録
480巻 1983年 130-141

順序半群によるセマンティクス

広島大 総合科 小野 寛晰 (Hiroakira Ono)
静岡大 理学部 古森 雄一 (Yuichi Komori)

Gentzen の直観主義論理体系 LJ から contraction を取り除いても Cut 除去定理が成り立つ。 また、その体系 (L_{BCK} と呼ぶ) は Łukasiewicz の無限値多値論理よりも弱い論理になっている。 すなわち、L_{BCK} で証明できる論理式は Łukasiewicz の $\aleph_0$-値モデルで恒等真になっている。 更に、L_{BCK} は井関清志 (神戸大) 氏等によって研究されていた BCK 代数の Gentzen 流の formulation になっており、古森によりそれが提出されてからその影響を受けた論文がいくつか現れた (cf. [1], [3], [4])。その後、我々は L_{BCK} および L_{BCK} から更に exchange を取り除いて得られる体系 L_{BCC} のクリプケ流のモデルを何とか考えられないものだろうか、と思い続けていた。 もしそのようなものがあれば、Łukasiewicz 論理のクリプケ流のモデルも与えるであろうし、従来の直観主義論理のクリプケモデルの一般化になっていると考えられた。 しかし、アイデアに欠けていたため、なかなかうまくいかなかったが、Idziak の論文か

らヒントを得て、1982年の9月頃にL_{BCC}, L_{BCK}のクリプケ流のセマンティクスが完成した。その詳しい内容——L_{BCC}のヒルベルト流の形式化、従来の直観主義命題論理のクリプケモデルとの関係、Łukasiewicz論理のクリプケモデル、BCKタイプの代数への応用等——については[2]を参照して下さい。ここでは、[2]でtotal strong Kripke modelと呼ばれている(ここでは、単にクリプケモデルと言うことにする)モデルのL_{BCC}に対する完全性定理を主に論じる。

論理記号としては、次の5つを用いる；⊃(implies)，∨(or)，∧(かつ)，&(and)，⊥(falsehood)。命題変数を表わすのに、$p, q, r, s, \cdots$を用いる。論理式を表わすのには、$\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$を用いる。また、⊃による結びつきは他の論理記号による結びつきより弱いものとする。すなわち、$\alpha \& \beta \supset \gamma$は$(\alpha \& \beta) \supset \gamma$を意味している。また、それ以外の足りないかっこは右から補うものとする。すなわち、$\alpha \supset \beta \supset \gamma$，$\alpha \wedge \beta \& \gamma$は、それぞれ$\alpha \supset (\beta \supset \gamma)$，$\alpha \wedge (\beta \& \gamma)$を意味する。$\Gamma, \Delta, \Sigma, \cdots$によって論理式の有限列(空列でもよい)を表わす。

L_{BCC}の始式(initial sequent)は次の2つの型のいずれかである。

$$\bot \to \alpha \quad (\alpha \text{は任意の論理式}),$$

$$p \to p \quad (p \text{は任意の命題変数}).$$

L_{BCC}の推論規則は次の12の規則である。

$$\frac{\Gamma, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \alpha, \Delta \to \gamma}\ (\text{weakning}) \qquad \frac{\Gamma \to \alpha \quad \Delta, \alpha, \Sigma \to \gamma}{\Delta, \Gamma, \Sigma \to \gamma}\ (\text{cut})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta}\ (\to \supset) \qquad \frac{\Gamma \to \alpha \quad \Delta, \beta, \Sigma \to \gamma}{\Delta, \alpha \supset \beta, \Gamma, \Sigma \to \gamma}\ (\supset \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \alpha \vee \beta}\ (\to \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \vee \beta}\ (\to \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \to \gamma \quad \Gamma, \beta, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \to \gamma}\ (\vee \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \wedge \beta}\ (\to \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \to \gamma}\ (\wedge \to 1) \qquad \frac{\Gamma, \beta, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \to \gamma}\ (\wedge \to 2)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \Delta \to \beta}{\Gamma, \Delta \to \alpha \,\&\, \beta}\ (\to \&) \qquad \frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \alpha \,\&\, \beta, \Delta \to \gamma}\ (\& \to).$$

L_{BCK}はL_{BCC}に次のexchangeをつけ加えたものである。

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \to \gamma}\ (\text{exchange}).$$

LJ^* は L_{BCK} に次の contraction をつけ加えたものである。

$$\frac{\Gamma,\ \alpha,\ \alpha,\ \Delta \longrightarrow \gamma}{\Gamma,\ \alpha,\ \Delta \longrightarrow \gamma}\ (\text{contraction})\ .$$

定理 1. L_{BCC}, L_{BCK}, LJ^* では cut 除去定理が成り立つ。

定義 2. $\langle M, \cdot, 1; \leq \rangle$ が PO-monoid であるとは、次の 3 つの条件を満たすことである；

(i) $\langle M, \cdot, 1 \rangle$ が 1 を単位元とする monoid である,

(ii) $\langle M, \leq \rangle$ が順序集合で、任意の $a, b, c \in M$ について、$a \leq b$ ならば $a \cdot c \leq b \cdot c$ かつ $c \cdot a \leq c \cdot b$ が成り立つ,

(iii) すべての $a \in M$ に対して $1 \leq a$ である。

定義 3. $\langle M, \cdot, 1, \infty; \leq \rangle$ が SO-monoid であるとは次の 3 つの条件を満たすこと；

(i) $\langle M, \cdot, 1; \leq \rangle$ が PO-monoid である,

(ii) $\langle M, \infty; \leq \rangle$ が順序 $\leq$ に関して下半束をなし、∞ を最大元としてもつ。$a, b \in M$ の下限を $a \cap b$ とかく,

(iii) 任意の $a, b, c \in M$ について

$$a \cdot (b \cap c) = a \cdot b \cap a \cdot c \quad \text{かつ} \quad (b \cap c) \cdot a = b \cdot a \cap c \cdot a\ .$$

$\mathbb{M} = \langle M, \cdot, 1, \infty; \leq \rangle$ を SO-monoid とする。 $\models$ が $\mathbb{M}$ 上の forcing であるとは、$\models \subseteq M \times$(命題変数全体の集合)($(a, p) \in \models$ を $a \models p$ とかく)で任意の $a, b \in M$, 任意の命題変数 p に対して (i) $a \cap b \models p \Leftrightarrow a \models p$ かつ $b \models p$ (ii) $\infty \models p$ が成り立っていることである。

$\mathbb{M}$ 上の forcing $\models$ を次のようにして、任意の論理式にまで、論理式の構成について帰納的に定義してやる。

(a) $a \models \bot \Leftrightarrow a = \infty$,

(b) $a \models \alpha \supset \beta \Leftrightarrow \forall b \in M$ ($b \models \alpha$ ならば $a \cdot b \models \beta$),

(c) $a \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow \exists b, c \in M$ ($a \geq b \cap c$ かつ $b \models \alpha$ かつ $c \models \beta$),

(d) $a \models \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow a \models \alpha$ かつ $b \models \beta$

(e) $a \models \alpha \,\&\, \beta \Leftrightarrow \exists b, c \in M$ ($a \geq b \cdot c$ かつ $b \models \alpha$ かつ $c \models \beta$)。

Remark. $\vee$ の解釈は '$a \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow a \models \alpha$ 又は $a \models \beta$' としたいのであるが、そうすると $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \to (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ が常に valid になってしまう。ところが、上の sequent は L_{BCC}(L_{BCK} でも)では証明できないので、完全性定理を成り立たせるためには、(c)のような解釈をしなければならない。 L_{DBCC} を L_{BCC} に更に、始式として $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \to (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ の型のものをつけ加えたものとすると、L_{DBCC}

では $\vee$ の解釈を '$a \models \alpha \vee \beta \iff a \models \alpha$ または $a \models \beta$' としても完全性定理がいえる． 詳しくは［2］を参照して欲しい．

補題4． 任意の論理式 φ に対して．

(i) 任意 $a, b \in M$ について $a \cap b \models \varphi \iff a \models \varphi$ かつ $b \models \varphi$,

(ii) $\infty \models \varphi$ ．

証明．(ii)の証明は簡単なので略す． (i)は論理式の構成に関する帰納法で証明する． ここでは，φ が $\alpha \supset \beta$ と $\alpha \vee \beta$ の2つの型のときのみ証明しておく．

$a \cap b \models \alpha \supset \beta \iff \forall c \in M$ ($c \models \alpha$ ならば $(a \cap b) \cdot c \models \beta$)

$\iff \forall c \in M$ ($c \models \alpha$ ならば $a \cdot c \cap b \cdot c \models \beta$)

［帰納法の仮定により］

$\iff \forall c \in M$ ($c \models \alpha$ ならば ($a \cdot c \models \beta$ かつ $b \cdot c \models \beta$))

$\iff \forall c \in M$ ($c \models \alpha$ ならば $a \cdot c \models \beta$) かつ $\forall c \in M$ ($c \models \alpha$ ならば $b \cdot c \models \beta$)

$\iff a \models \alpha \supset \beta$ かつ $b \models \alpha \supset \beta$ ．

$a \cap b \models \alpha \vee \beta \iff \exists c, d \in M$ ($a \cap b \geq c \cap d$ かつ $c \models \alpha$ かつ $d \models \beta$)

$\iff \exists c, d \in M$ ($a \geq c \cap d$ かつ $b \geq c \cap d$ かつ $c \models \alpha$ かつ $d \models \beta$)

(*) $\Rightarrow \exists c, d \in M$ ($a \geq c \cap d$ かつ $c \models \alpha$ かつ $d \models \beta$) かつ

$\exists c, d \in M$ ($b \geq c \cap d$ かつ $c \models \alpha$ かつ $d \models \beta$)

$\iff a \models \alpha \vee \beta$ かつ $b \models \alpha \vee \beta$

㊀の逆は次のようにして示す．

$a \geq c \cap d$ かつ $c \models \alpha$ かつ $d \models \beta$
$b \geq c' \cap d'$ かつ $c' \models \alpha$ かつ $d' \models \beta$ } とする.

$c \cap c'$ と $d \cap d'$ を考えると，

$a \geq (c \cap c') \cap (d \cap d')$ かつ $b \geq (c \cap c') \cap (d \cap d')$ かつ

$c \cap c' \models \alpha$ かつ $d \cap d' \models \beta$

となり逆がいえる．　　証明終

定義5．(1) $\langle \mathbb{M}, \models \rangle$ がクリプケモデルとは，$\mathbb{M}$ が SO-monoid で $\models$ が $\mathbb{M}$ 上の forcing となっていること。このとき $\mathbb{M}$ をクリプケ構造という．

(2) 論理式 φ がクリプケモデル $\langle \mathbb{M}, \models \rangle$ で valid であるとは $1 \models \varphi$ となっていること．

(3) $\forall a \in \mathbb{M}$

$a \models \alpha_1, \cdots, \alpha_n \longrightarrow \beta \overset{def}{\iff} \forall a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{M}\ ((a_1 \models \alpha_1$ かつ $\cdots$ かつ $a_n \models \alpha_n)$ ならば $a \cdot a_1 \cdots a_n \models \beta)$

($n=0$ のときは $a \models \beta$)

(4) $\Gamma \to \gamma$ がクリプケモデル $\langle \mathbb{M}, \models \rangle$ で valid であるとは $1 \models \Gamma \to \gamma$ となっていること．

定理6． sequent $\Gamma \to \delta$ が L_{BCC} で証明できるならば、任意のクリプケモデルで $\Gamma \to \delta$ は valid ．

証明． L_{BCC} での証明の長さに関する帰納法で証明すればよい。すなわち、始式がすべて valid であること、推論規則の上式が valid ならば下式も valid であること、を示せばよい。ここでは、$(\to \vee 1)$ と $(\vee \to)$ についてだけ示しておく。

$(\to \vee 1)$ $\Gamma = \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ とする。 $a \models \Gamma \to \alpha$ ① とする。
また、 $c_i \models \gamma_i$ $(1 \leq i \leq m)$ ② とする。 ①②より、

$a \cdot c_1 \cdots c_m \models \alpha$ となる。 $a \cdot c_1 \cdots c_m \geq a \cdot c_1 \cdots c_m \cap \infty$ かつ $\infty \models \beta$ （補題4 (ii)による）だから、

$$a \cdot c_1 \cdots c_m \models \alpha \vee \beta \text{。 ゆえに、 } a \models \Gamma \to \alpha \vee \beta \text{ 。}$$

$(\vee \to)$ $\Gamma = \gamma_1, \cdots, \gamma_m$, $\Delta = \delta_1, \cdots, \delta_n$, $a \models \Gamma, \alpha, \Delta \to \gamma$ ①, $a \models \Gamma, \beta, \Delta \to \gamma$ ②, $c_i \models \gamma_i$ $(1 \leq i \leq m)$ ③, $d_i \models \delta_i$ $(1 \leq i \leq n)$ ④, $e \models \alpha \vee \beta$ ⑤ とする。

⑤より $\exists f, g \in M$ $e \geq f \cap g$ $f \models \alpha$ かつ $g \models \beta$.

$f \models \alpha$ と ①③④ より $a \cdot c_1 \cdots c_m \cdot f \cdot d_1 \cdots d_n \models \gamma$.

$g \models \beta$ と ②③④ より $a \cdot c_1 \cdots c_m \cdot g \cdot d_1 \cdots d_n \models \gamma$.

補題4 (i) より、 $a \cdot c_1 \cdots c_m \cdot f \cdot d_1 \cdots d_n \cap a \cdot c_1 \cdots c_m \cdot g \cdot d_1 \cdots d_n \models \gamma$.

よって、 $a \cdot c_1 \cdots c_m (f \cap g) \cdot d_1 \cdots d_n \models \gamma$ 。 補題4 (ii) と $a \cdot c_1 \cdots c_m \cdot e \cdot d_1 \cdots d_n \geq a \cdot c_1 \cdots c_m (f \cap g) \cdot d_1 \cdots d_n$ から

$a \cdot c_1 \cdots c_m \cdot e \cdot d_1 \cdots d_n \models \gamma$ となる。ゆえに、

$a \models \Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \rightarrow \gamma$ 。 証明終

次に、定理6の逆を証明しなければならない。論理式全体の集合を W とする。$\hat{W}$ により、論理式の有限列（空列も含む。空列を ϕ で表わす）全体の集合を表わす。任意の $\Gamma \in \hat{W}$ に対して、$[\Gamma]$ を次のように定義する。

$$[\Gamma] \overset{def}{=} \{ \alpha \in W \mid \Gamma \rightarrow \alpha \text{ が } L_{BCC} \text{ で証明できる} \}.$$

また、$T \overset{def}{=} \{ [\Gamma] \mid \Gamma \in \hat{W} \}$ とする。明らかに、T は $\subseteq$ に関し $[\phi]$ を最小元, W を最大元とする順序集合になっている。T の元 $[\Gamma], [\Delta]$ に対して、$[\Gamma] \cdot [\Delta]$ を

$$[\Gamma] \cdot [\Delta] \overset{def}{=} \{ \alpha \mid \Gamma, \Delta \rightarrow \alpha \text{ が } L_{BCC} \text{ で証明できる} \}$$

で定義すると、・は well-defined（Γ, Δ のえらびかたによらない）である。

補題7. $\langle T, \cdot, [\phi]; \subseteq \rangle$ は PO-monoid である。

補題8. $\langle T, \cdot, [\phi], W; \subseteq \rangle$ は SO-monoid である。

証明. $\Gamma = \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ のとき、$\Gamma^{\&}$ により論理式 $\alpha_1 \& \alpha_2 \& \cdots \& \alpha_m$ を表わす。ただし Γ が空列のときは、$\Gamma^{\&} = p \supset p$ とする。$[\Gamma] \cap [\Delta]$ は $[\Gamma^{\&} \vee \Delta^{\&}]$ となることが簡単に分り、$[\Gamma] \cap [\Delta] \in T$ となる。次に、

$$[\Sigma]\cdot([\Gamma]\cap[\Delta]) = [\Sigma]\cdot[\Gamma]\cap[\Sigma]\cdot[\Delta]$$

となることを示す。補題7（特にPO-monoidの(ii)）により、

$[\Sigma]\cdot([\Gamma]\cap[\Delta]) \subseteq [\Sigma]\cdot[\Gamma]\cap[\Sigma]\cdot[\Delta]$ はすぐでる。

逆向きを示す。$\alpha \in [\Sigma]\cdot[\Gamma]\cap[\Sigma]\cdot[\Delta]$ とすると、

$\Sigma, \Gamma \rightarrow \alpha$ と $\Sigma, \Delta \rightarrow \alpha$ の両方が L_{BCC} で証明できる。これから $\Sigma, \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$ と $\Sigma, \Delta^{\&} \rightarrow \alpha$ がともに L_{BCC} で証明できる。ゆえに、$\Sigma, \Gamma^{\&} \vee \Delta^{\&} \rightarrow \alpha$ が L_{BCC} で証明できる。よって、$\alpha \in [\Sigma]\cdot([\Gamma]\cap[\Delta])$ となる。

同様に $([\Gamma]\cap[\Delta])\cdot[\Sigma] = [\Gamma]\cdot[\Sigma]\cap[\Delta]\cdot[\Sigma]$ も証明できる。

証明終

SO-monoid $\mathbb{T} = \langle T, \cdot, [\phi], W ; \leq \rangle$ 上に forcing $\models$ を次のように定義する。任意の命題変数 p, 任意の $[\Gamma] \in T$ に対して,

$[\Gamma] \models p \iff p \in [\Gamma]$ （すなわち、$\Gamma \rightarrow p$ が L_{BCC} で証明できる）

このとき、$\models$ は forcing の条件 (i)(ii) をみたす。

補題9. $\models$ を上で定義した $\mathbb{T}$ 上の forcing とする。任意の $[\Gamma] \in T$ と任意の論理式 φ に対して

$$[\Gamma] \models \varphi \iff \varphi \in [\Gamma] \quad .$$

証明. 次の (a) ～ (e) を示せばよい。（$\Gamma \rightarrow \alpha$ が

L_{BCC} で証明できることを $\vdash \Gamma \to \alpha$ とかく）

(a) $\vdash \Gamma \to \bot \iff [\Gamma] = W$,

(b) $\vdash \Gamma \to \alpha \supset \beta \iff \forall \Delta \in \hat{W}$ ($\vdash \Delta \to \alpha$ ならば $\vdash \Gamma, \Delta \to \beta$),

(c) $\vdash \Gamma \to \alpha \vee \beta \iff \exists \Delta_1, \Delta_2 \in \hat{W}$ ($[\Delta_1] \cap [\Delta_2] \subseteq [\Gamma]$ かつ $\vdash \Delta_1 \to \alpha$ かつ $\vdash \Delta_2 \to \beta$),

(d) $\vdash \Gamma \to \alpha \wedge \beta \iff \vdash \Gamma \to \alpha$ かつ $\vdash \Gamma \to \beta$,

(e) $\vdash \Gamma \to \alpha \,\&\, \beta \iff \exists \Delta_1, \Delta_2 \in \hat{W}$ ($[\Delta_1]\cdot[\Delta_2] \subseteq [\Gamma]$ かつ $\vdash \Delta_1 \to \alpha$ かつ $\vdash \Delta_2 \to \beta$).

ここでは、**(c)** のみを示しておく。 $\vdash \Gamma \to \alpha \vee \beta$ とする。 $\Delta_1 = \alpha$, $\Delta_2 = \beta$ とすると、 $[\Delta_1] \cap [\Delta_2] \subseteq [\Gamma]$ かつ $\vdash \Delta_1 \to \alpha$ かつ $\vdash \Delta_2 \to \beta$ が成立している。 逆に、 $\hat{W}$ の元 Δ_1 と Δ_2 が存在して $[\Delta_1] \cap [\Delta_2] \subseteq [\Gamma]$ かつ $\vdash \Delta_1 \to \alpha$ かつ $\vdash \Delta_2 \to \beta$ となっているとする。 そのとき、 $\vdash \Gamma \to \Delta_1^{\&} \vee \Delta_2^{\&}$ かつ $\vdash \Delta_1^{\&} \to \alpha$ かつ $\vdash \Delta_2^{\&} \to \beta$ となる。 これから $\vdash \Gamma \to \alpha \vee \beta$ がいえる。 <u>証明終</u>

系 10. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \to \beta$ が L_{BCC} で証明できないならば、 $\langle \mathbb{T}, \models \rangle$ で valid でない。

<u>証明.</u> $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \to \beta$ が証明できないとすると、補題 9 により $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \not\models \beta$ (' $[\Gamma] \models \alpha$ でない' ことを $[\Gamma] \not\models \alpha$ とかく) となる。 $[\alpha_i] \models \alpha_i$ $(1 \leq i \leq n)$ かつ

$[\alpha_1]\cdot[\alpha_2]\cdot\cdots\cdot[\alpha_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ だから

$[\phi] \not\models \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \to \beta$ 。 証明終.

定理 6 と系 10 により

定理 11 (完全性定理).

$\Gamma \to \delta$ が L_{BCC} で証明できる

$\Leftrightarrow$ $\Gamma \to \delta$ がすべてのクリプケモデルで valid.

L_{BCC}, L_{BCK} についての研究は、始まったばかりであります。 興味深い問題も残っています。 我々が興味をもっている問題のリストが [2] にありますので参照して下さい。

参考文献

[1] P. M. Idziak, Lattice operation in BCK-algebras.

[2] H. Ono and Y. Komori, Logics without the contraction rule.

[3] A. Wroński, Interpolation and amalgamation property of BCK-algebras.

[4] A. Wroński and P. S. Krzystek, On pre-Boolean algebras.